12/5/2016

Άσκηση 17 (επαναληπτική)

χρόνοι σε λεπτά	6	7	9	8	10	8	11	7
	6	5	10	5	11	9	10	6

$n=16$

$N(\mu, \sigma^2)$

i) είναι υπάλληλοι μαθαίνουν/δεν γνωρίζουν από το μέσο υπάλληλο για $\mu=10$, $\sigma=0{,}05$. Να βρεθεί ένα 95% Δ.Ε. για το μ.

ii) Αν $\sigma^2=9$ να βρούμε τα ίδια που βρήκαμε για το (i) και την ισχύ του τεστ με $H_a: \mu=9$

i) $H_0: \geq 10 \quad V \quad H_a: \mu<10$

$\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \Rightarrow$ ένα 95% Δ.Ε. για το μ:

$\bar{x} \pm t_{0{,}025,15} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 8 \pm 2{,}131 \frac{2{,}064}{\sqrt{16}} \Rightarrow [6{,}911, 9{,}0$

$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ($\sim t_{n-1}$ όταν H_0 αληθής) $\Rightarrow$

$t = \frac{\bar{x}-10}{S/\sqrt{16}} = \frac{8-10}{2{,}064/4} = -3{,}88$

Κρίσιμη περιοχή: $t \leq -t_{a,n-1} = -t_{0{,}05,15} = -1{,}753$

αφού $\bar{x}=8$

και $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = 4{,}26 \Rightarrow S = 2{,}064$

απορρίπτεται η H_0

ii) $N(\mu, \sigma^2=9)$

$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ όταν H_0 αληθής

Κρίσιμη περιοχή: $Z \leq -z_a = -z_{0,05} = -1,645$

$$Z = \frac{8-10}{3/4} = -2,65 < -1,645 \Rightarrow$$ απορρίπτω την H_0

Ισχύς του τεστ όταν $H_a: \mu = 9$: $\gamma = 1-\beta$ όταν $H_0: \mu = 10$ V $H_a: \mu$

$\beta = P($δεχόμαστε την H_0 | ισχύει η $H_a) =$

$$= P(Z \geq -1,645 \mid \mu = 9) =$$

δεν έχει την
τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$
γιατί απορρίψαμε την H_0
οπότε κάνουμε το αλλο λυθοτέχνασμα

!!!

$$\bar{X} \sim N(\mu = 9, \sigma^2 = 9)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-9}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$= P\Bigg(\underbrace{Z' = \frac{\bar{X}-10}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}}_{= \frac{\bar{X}-9}{\sigma/\sqrt{n}}} \geq -1,645 + \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} \;\Bigg|\; Z' \sim N(0,1)\Bigg) =$$

$$= P\left(Z' \geq -1,645 + \frac{1}{\frac{3}{4}} \;\middle|\; Z' \sim N(0,1)\right) =$$

$$= P(Z' \geq -0,312 \mid Z' \sim N(0,1)) =$$

$$= 0,5 + P(0 \leq Z' \leq 0,312 \mid Z' \sim N(0,1))$$

$$= 0,6225$$

Άρα: $\gamma = 1 - \beta = 1 - 0,6225 = 0,3775$

Άσκηση 16 (επαναληπτική)

$$H_0: \mu = \overset{\text{έσοδα από CD}}{\mu_1} + \overset{\text{έσοδα από κασέτες}}{\mu_2} - \overset{\text{έξοδα}}{\mu_3} = \overset{\text{κέρδος}}{\kappa} \quad V \quad H_a: \mu \neq \kappa \quad (a, 0.05)$$

$\bar{X}_i \sim N\left(\mu_i, c_i \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ανεξάρτητες τ.μ. $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ γνωστές

$X_1 \sim N(\mu_1, c_1 \sigma^2)$,

$X_2 \sim N(\mu_2, c_2 \sigma^2)$,

$X_3 \sim N(\mu_3, c_3 \sigma^2)$,

$$\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3, (c_1 + c_2 + c_3)\frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{X} - (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)}{\sigma\sqrt{\frac{c_1 + c_2 + c_3}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(n-1)S^2_{x_1}}{c_1 \sigma^2} \sim X^2_{n-1} \\ \frac{(n-1)S^2_{x_2}}{c_2 \sigma^2} \sim X^2_{n-1} \\ \frac{(n-1)S^2_{x_3}}{c_3 \sigma^2} \sim X^2_{n-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2}\left(\frac{S^2_{x_1}}{c_1} + \frac{S^2_{x_2}}{c_2} + \frac{S^2_{x_3}}{c_3}\right) \sim X^2_{3(n-1)} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\frac{\bar{X} - (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)}{\sigma\sqrt{\frac{c_1 + c_2 + c_3}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)}{\sigma^2}\left(\frac{S^2_{x_1}}{c_1} + \frac{S^2_{x_2}}{c_2} + \frac{S^2_{x_3}}{c_3}\right)}{3(n-1)}}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3 - \mu}{\sqrt{\frac{c_1 + c_2 + c_3}{3n}\left(\frac{S^2_{x_1}}{c_1} + \frac{S^2_{x_2}}{c_2} + \frac{S^2_{x_3}}{c_3}\right)}} \sim t_{3(n-1)}$$ και για $\mu = \kappa$ όταν H_0 αληθής

κρίσιμη περιοχή: $|t| \geq t_{a/2, 3(n-1)}$

		Βαθμοί ελευθερίας	Μέσα τετράγωνα	
Δοκ.	$SS_{tre} = \sum_j n_j (\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2$	$r-1$	$MS_{tre} = \frac{SS_{tre}}{r-1}$	$F = \frac{MS_{tre}}{MS_{res}}$ κρίσιμη περιοχή:
Υπολ.	$SS_{res} = SS_{tot} - SS_{tre}$	$n-r$	$MS_{res} = \frac{SS_{res}}{n-r}$	$F \geq F_{a, r-1, n-r}$
Ολική Μεταβλητότητα	$SS_{tot} = \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2$	$n-1$	—	—

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r$ V H_a : όχι όλα τα μ_j ίσα μεταξύ τους

$H_0 : \mu_u - \mu_v = 0$ V $H_a : \mu_u - \mu_v \neq 0$

$$t = \frac{\overline{Y}_{\cdot u} - \overline{Y}_{\cdot v}}{\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v}\right)}} \quad , |t| \geq t_{a/2, n-r}$$

6.1 $E(MS_{tre}) = \sigma^2 + \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^{r} (\mu_j - \mu)^2$ όπου $\mu = \frac{\sum n_j \mu_j}{n}$, $n = \sum_j n_j$

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad , i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, r$$

$$Y_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2)$$

$$SS_{tre} = \sum_j \frac{Y_{\cdot j}^2}{n_j} - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{r} \ , \ MS_{tre} = \frac{SS_{tre}}{r-1}$$

$$E(SS_{tre}) = \sum_j \frac{E(Y_{\cdot j}^2)}{n_j} - \frac{E(Y_{\cdot\cdot}^2)}{n}$$

$$\left(Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \right)$$

Απόδειξη: $E(Y_{\cdot j}) = E\left[\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n_j} E(Y_{ij}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n_j} \mu_i = n_j \mu_j$$

$$Var(Y_{\cdot j}) = \sum_{i=1}^{n_j} Var(Y_{ij}) = \sum_{i=1}^{n_j} \sigma^2 = n_j \sigma^2 \quad \Longrightarrow$$

$$E(Y_{\cdot j}^2) = n_j \sigma^2 + \mu_j^2 n_j^2$$

$$E(Y_{\cdot\cdot}) = \sum_j \sum_i E(Y_{ij}) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} \mu_i = \sum_{j=1}^{r} n_j \mu_i = n\mu$$

$$Var(Y_{\cdot\cdot}) = \sum_j \sum_i Var(Y_{ij}) = \sum_j \sum_i \sigma^2 = n\sigma^2 \quad \Longrightarrow$$

$$E(Y_{\cdot\cdot}^2) = n\sigma^2 + n^2\mu^2$$

$$E(MS_{tre}) = \frac{1}{r-1}\left[\sum_j \frac{n_j\sigma^2 + n_j^2\mu_j^2}{n_j} - \frac{n\sigma^2 + n^2\mu^2}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{r-1}\left[\sum_{j=1}^{r}(\sigma^2 + n_j\mu_j^2) - \sigma^2 - n\mu^2\right] =$$

$$= \frac{1}{r-1}\left(\sigma^2(r-1) + \sum_{j=1}^{r} n_j\mu_j^2 - n\mu^2\right] =$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{r-1}\left(\sum_{j=1}^{r} n_j\mu_j^2 - n\mu^2\right)$$

Άσκηση 6.3 (συνέχεια λύσης)

	Άθροισμα	Βαθμοί ελευθερίας	MS
Θερ.	$SS_{tre} = 25,2174$	3	8,4058
Υπολ.	$SS_{res} = 18$	19	0,9474
Ολ. μεταβλ.	$SS_{tot} = 43,2174$	20	–

$F \geq F_{0,05,3,19} = 3,13$

$F = 8,8728$

απορρίπτουμε την H_0

$H_0: \mu_4 - \mu_3 = 0 \quad \vee \quad H_a: \mu_4 - \mu_3 > 0$

$$t = \frac{9-6}{\sqrt{0,9474\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)}} = 4,7749 > 1,729$$ [redacted] $= t_{0,05,19} \Rightarrow$

απορρίπτουμε την H_0

Άσκηση 5.6

8 ομάδες των 25 ποντικιών

i	Δόση σε mg X	Θάνατοι Y	X_iY_i	X_i^2	Y_i^2
1	4	1	4	16	1
2	6	3	18	36	9
3	8	6	48	64	36
4	10	8	80	100	64
5	12	14	168	144	196
6	14	16	224	196	256
7	16	20	320	256	400
8	18	21	278	324	441
Σύνολο	88	89	1240	1136	1403

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i = \frac{88}{8} = 11$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i = \frac{89}{8} = 11,125$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} = 1136 - \frac{(88)^2}{8} = 168$$

$$\sum (Y_i - \bar{Y}) = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} = 1403 - - \frac{89^2}{8} = 412,875$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} =$$

$$= \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{1240 - \frac{89 \cdot 88}{8}}{168} = 1,554$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 11,125 - 1,554 \cdot 11 = -5,964$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = -5,964 + 1,554 x_0$$

Για $x_0 = 7 \Rightarrow \hat{Y}_0 = 5$

Ανάλυση

$SS_{reg} = \hat{\beta}_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2 = 405,482$ 1 $MS_{reg} = 405,482$

$F = \frac{405,482}{1,232} = 329,08$

$SS_{res} = SS_{tot} - SS_{reg} = 7,393$ 6 $MS_{res} = 1,232$ $> F_{0,05,1,6} = 5,32$

$SS_{tot} = \sum (Y_i - \bar{Y}) = 412,875$ 7

Απορρίπτουμε την H_0

$$R^2 = \frac{SS_{reg}}{SS_{tot}} = 0,982$$